



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS
OLIMPIADA MATEMÁTICA
SEDEM
JUVENIL 02



Semestre 2025 - A

Mat. Jonathan Ortiz

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

2. Sea C la curva definida por la ecuación polar

$$r = 2 + \cos(t).$$

Los vértices del triángulo PQR son los puntos en C correspondientes a $t = 0$, $t = \pi$ y $t = \frac{\pi}{3}$. Calcule el área del triángulo PQR .

3. Se construye una torre triangular de letras alineadas a la derecha, que tiene 2015 pisos y que incluye las siglas SEDEM de la forma en que se ilustra a continuación:

S
SE
SED
SEDE
SEDEM
SEDEMS
SEDEMSE
⋮

¿Cuántas veces se escribe la palabra “SEDEM” en la torre?

4. Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos cuadrados son iguales a 505, 233 y 52 hectáreas, respectivamente.

¿Cuál es la superficie del campo triangular?

5. Encuentre todas las parejas de números primos p y q que satisfacen la ecuación

$$p^q + q^p = 2^{q+1} + 1$$

6. Determine si existe un número de dos dígitos \overline{ab} tal que

$$\overline{ab} = 2\overline{ba}.$$

7. Jaime escribe un programa en la computadora tal que si le ingresa un número, el programa lo multiplica por 10, luego le resta 1 y muestra ese resultado.

Por ejemplo, si ingresa el número 5, la computadora le muestra el número

$$10 \times 5 - 1 = 49.$$

Jaime ingresa inicialmente el número 2023 y ejecuta el programa 100 veces ingresando el resultado mostrado en el paso anterior.

Hallar el último número que muestra la computadora.

8. En un juego se tienen 21 palillos con longitudes de $1, 2, 3, \dots, 21$ centímetros. Ana y Pedro deben retirar por turnos un palillo cada uno, hasta que queden únicamente tres palillos. Si estos tres palillos pueden usarse para formar un triángulo, Ana gana el juego. Caso contrario, Pedro lo hace.

Suponiendo que Ana empieza, ¿tiene algún jugador una estrategia que le permita ganar siempre?

(Problema adaptado de *Bundeswettbewerb Mathematik 2010.1*).