Ejercicios

miércoles, 14 de mayo de 2025 14:29

Ejercicios

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIAS
OLIMPIADA MATEMÁTICA
SEDEM

JUVENIL 02

Semestre 2025 - A — Mat. Jonathan Ortiz

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que

$$1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1+2+\cdots+n)^2.$$

Para $n=1$: Izq: $1^3 = 1$, Der: $1^2 = 1$ ✓

Para $n=2$: Izq: $1^3+2^3 = 1+8 = 9$ Der: $(1+2)^2 = 3^2 = 9$ ✓

HI) $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ ✓

PD) $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = ((1+2+\cdots+n)+(n+1))^2$

$$(1^3+2^3+\cdots+n^3)+(n+1)^3 = (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3 \quad \text{HI)}$$

$$((1+2+\cdots+n)+(n+1))^2 = (1+2+\cdots+n)^2+2(1+2+\cdots+n)(n+1)+(n+1)^2$$

$$= (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)[2(1+2+\cdots+n)+(n+1)]$$

$$= (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)[n(n+1)+(n+1)]$$

$$= (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)(n^2+n+n+1)$$

$$\boxed{=(1+2+\cdots+n)^2}+(n+1)(n^2+2n+1)$$

$(n+1)^2$

$$(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3$$

$$\boxed{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$(1+2+\dots+n) + (n+1)$

1

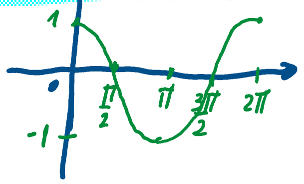
2. Sea C la curva definida por la ecuación polar

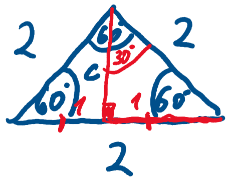
$$r = 2 + \cos(t).$$

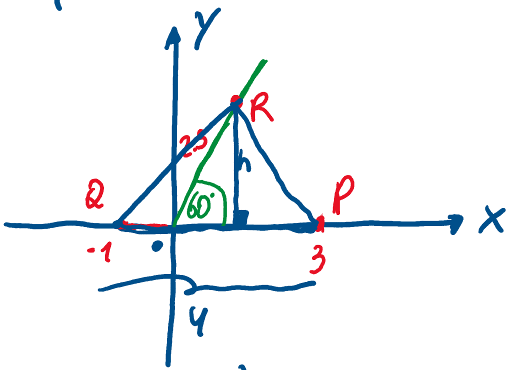
Los vértices del triángulo PQR son los puntos en C correspondientes a $t = 0$, $t = \pi$ y $t = \frac{\pi}{3}$. Calcule el área del triángulo PQR.

$\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

	t	$\cos(t)$	r
P:	0	1	3
Q:	π	-1	1
R:	$\frac{\pi}{3}$	$1/2$	$5/2 = 2.5$







$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Sen}(60°) = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por Pitágoras:

$2^2 = 1^2 + c^2$

$4 - 1 = c^2$

$c^2 = 3$

$|c| = \sqrt{3}$

$c = \sqrt{3}$

$\operatorname{Sen}(60°) = \frac{h}{2.5}$

$h = 2.5 \operatorname{Sen}(60°)$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$S_{PQR} = \frac{PQ \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ //

3. Se construye una torre triangular de letras alineadas a la derecha, que tiene 2015 pisos y que incluye las siglas SEDEM de la forma en que se ilustra a continuación:

¿Cuántas veces se escribe la palabra "SEDEM" en la torre?

¿ 2025 pisos?

1: S (0)
2: SE (0)
3: SED (0)
4: SEDE (0)
5: SEDEM ✓ (1)
6: SEDEMS (1)
7: SEDEMSE (1)
8: SEDEMSED (1)
9: SEDEMSEDE (1)
10: SEDEMSEDEM (2)
11: SEDEMSEDEMS (2)
12: SEDEMSEDEMSE (2)
13: SEDEMSEDEMSED (2)
14: SEDEMSEDEMSEDE (2)
15: SEDEMSEDEMSEDEM (3)

$4 = 5 - 1$

$9 = 10 - 1 = 2 \cdot 5 - 1$

$14 = 15 - 1 = 3 \cdot 5 - 1$

$19 = 20 - 1 = 4 \cdot 5 - 1$

Para $n = 4$: 0

Para $n = 5$: 1

Para $n = 9$: $5 = 5(1)$

Para $n = 14$: $5 + 5(2) = 5(1+2)$

Para $n = 19$: $5 + 5(2) + 5(3) = 5(1+2+3)$

Para $n = 24$: $5 + 5(2) + 5(3) + 5(4) = 5(1+2+3+4)$

Para $n = 99 = 5 \cdot 20 - 1$

$5(1+2+3+\dots+19)$

$2000 / 5 = 400$

Para $n = 2015$

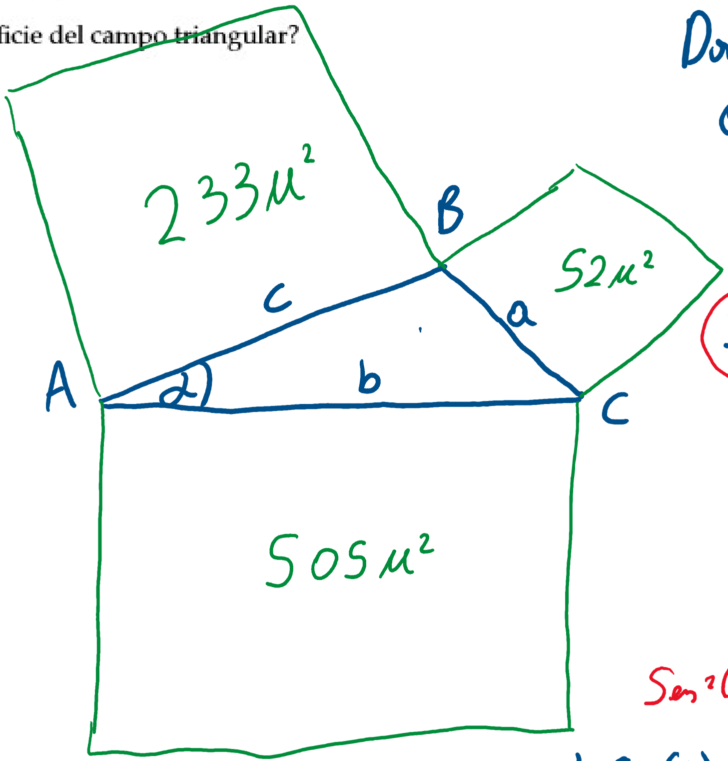
Para $n = 2014 = 5 \cdot (403) - 1$

$$5(1+2+\dots+402) = 5\,\frac{(402)(403)}{2} = 5(201)(403)$$

$n = 2015$: $5(201)(403) + 403 = 1005 \cdot (403) + 403 = 1006 \cdot 403$

4. Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos cuadrados son iguales a 505, 233 y 52 hectáreas, respectivamente.

¿Cuál es la superficie del campo triangular?



Datos

$a^2 = 52$

$b^2 = 505$

$c^2 = 233$

$$S_{ABC} = \frac{bc \cdot Sen(\alpha)}{2}$$

$$Sen^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1$$

Ley de Cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,Cos(\alpha)$$

$$52 = 505 + 233 - 2bc\,Cos(\alpha)$$

$$2bc\,Cos(\alpha) = 738 - 52 = 686$$

$$bc\,Cos(\alpha) = 343$$

$$Cos(\alpha) = \frac{343}{bc}$$

$$Sen(\alpha) = \sqrt{1 - Cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{343^2}{(bc)^2}} = \sqrt{\frac{b^2c^2 - 343^2}{b^2c^2}} = \frac{\sqrt{505 \cdot 233 - 343^2}}{bc}$$

$$bc\,Sen(\alpha) = \sqrt{505 \cdot 233 - 343^2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{505 \cdot 233 - 343^2}}{2}$$

5. Encuentre todas las parejas de números primos p y q que satisfacen la ecuación

$$p^q + q^p = 2^{q+1} + 1$$

Primo: Sea $n \in \mathbb{N}$. n es primo si $n > 1$ y solo es divisible para sí mismo y la unidad.

$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11.$

2 es el único primo par. $\boxed{2^q - 1 \text{ primos}}$

$$\underbrace{p^q + q^p}_{\text{Impar}} = \underbrace{\underbrace{2^{q+1}}_{\text{par}} + 1}_{\text{Impar}}$$

Hay casos: $(p = 2 \text{ y } q = 3)$

i) p^q par y q^p impar: $p = 2$.

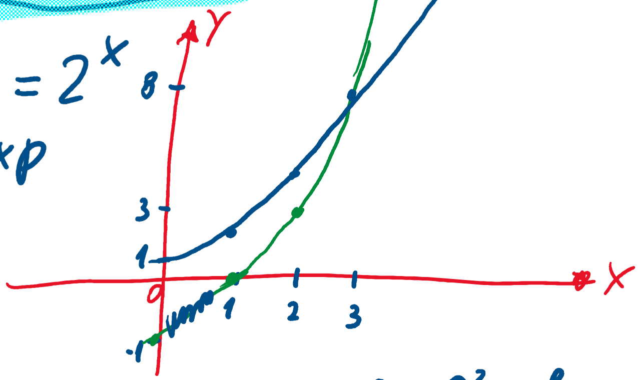
$$2^q + q^2 = 2^{q+1} + 1$$

$$q^2 - 1 = 2 \cdot 2^q - 2^q$$

$$\boxed{q^2 - 1 = 2^q} \qquad \boxed{q = 3}$$

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2^x$

pol exp



ii) p^q impar y q^p par: $q = 2$.

$$p^2 + 2^p = 2^3 + 1$$

$$\boxed{p^2 + 2^p = 9}$$

p	$p^2 + 2^p$
$\cancel{2}$	
3	$9 + 8 = 17$
5	

Por lo tanto, los únicos primos son $p = 2$ y $q = 3$.

6. Determine si existe un número de dos dígitos $\overline{ab}$ tal que

$$\overline{ab} = 2\overline{ba}.$$

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b \cdot 1 = 10a + b$$

$$\overline{ba} = 10b + a$$

$$10a + b = 20b + 2a$$

$$\underbrace{8a}_{\text{par}} = 19b \Rightarrow b \text{ es par}$$

$b \in \{0, \cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, \cancel{8}\}$

$$a = 19 \cdot \frac{b}{8}$$

Como a es entero, $\frac{b}{8}$ es entero, la única posibilidad es que $b=8$, pero $a = 19$ ✗.

Para $b=0$, $a=0$. El número es $00 = 0$ no es un número de dos dígitos. No existe dicho número.

6